

## 案例 3

### 使用刀具磨损过程的能力指数确定换刀时刻

来源	国家自然科学基金资助项目(项目编号: 70372062)	类别	<input checked="" type="checkbox"/> 案例 <input type="checkbox"/> 方法
作者	张敏 何桢	关键词	刀具磨损 过程能力 成本 初始状态 换刀时刻
理论知识	过程能力指数 Bernstein 概率密度函数	适用层次	<input checked="" type="checkbox"/> 本科生 <input checked="" type="checkbox"/> 研究生 <input type="checkbox"/> MBA

#### 1. 案例背景

在金属加工行业,加工刀具是影响零部件最终形状精确度的最主要因素。由于刀具磨损和老化,生产过程会逐渐恶化,过程均值由受控状态偏移到失控状态,此时,若未采取任何维修或替换措施,过程将生产出许多不合格品<sup>[3]</sup>。在许多生产过程,过程均值随时间或正或负方向偏移,刀具磨损过程就是正向偏移的例子<sup>[4]</sup>。偏移函数可以是线性或二次函数,可以是确定的或随机的函数。当换刀周期时间短时,更换刀具成本会增大,但生产出少量的不合格品,当换刀周期时间长时,更换刀具成本会降低,但可能生产出大量的不合格品<sup>[5]</sup>。

已经有许多学者针对刀具磨损过程进行了刀具管理策略的研究。这些研究都是在各种假设前提下,利用不同的函数,最终最小化单位时间内的成本以得出最佳的过程初始状态和(或)换刀周期时间,但均未考虑换刀周期内的过程能力,即满足单位时间内的成本为最小的换刀周期内,过程能力是否满足顾客要求的最小过程能力指数,以得到符合要求的不合格品率。为研究具有趋势项过程的能力指数,Spiring<sup>[14]</sup>将过程能力指数考虑为动态变化的而非固定不变,Xie<sup>[15]</sup>将趋势项考虑在方差之内,提出了具有线性趋势项过程的能力指数。

本案例在文献[15]的基础上,考虑质量损失、换刀成本、由刀具的突然失效引发的惩罚成本及刀具的残留价值,同时满足顾客要求的最小过程能力指数,提出了用于确定最佳刀具初始状态和换刀时刻的成本模型。

#### 2. 案例描述

##### 2.1 刀具磨损过程的过程能力指数

由于可以实时监测被加工工件的尺寸,因而可有效地间接表征出刀具磨损量<sup>[9]</sup>。由于刀具磨损过程显示出一缓慢的线性趋势,假设每一个工件尺寸观测值  $X_t$  依赖于时间  $t$ , 即

$$X_t = \mu_0 + R(t) + \varepsilon \quad t \leq Q \quad (1)$$

其中,  $X_t$  为测量值,  $\mu_0$  为刀具初始状态,  $R(t)$  为刀具磨损量, 本文假设  $R(t) = ct$ ,

其中  $c \sim N(\mu_c, \sigma_c^2)$ ,  $\varepsilon$  为残差项, 且其期望值为 0, 方差为  $\sigma_\varepsilon^2$ ,  $Q$  为刀具质量寿命, 即更换刀具的周期。谢敏<sup>[15]</sup>把具有趋势项的过程方差表示为:

$$\sigma_p^2 = \sigma_T^2 + \sigma_\varepsilon^2 \quad (2)$$

其中,  $\sigma_T^2$  表示由趋势项造成的非随机变异,  $\sigma^2$  表示去除趋势项后残差的方差。谢敏

得到修正后的过程能力指数为：

$$C_{pt} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\mu_c^2 Q^2 / 12 + \sigma_\varepsilon^2}} \quad (3)$$

为满足顾客要求的最小过程能力指数  $C_p^*$ ，必须满足以下公式：

$$\frac{USL - LSL}{6\sqrt{\mu_c^2 Q^2 / 12 + \sigma_\varepsilon^2}} \geq C_p^* \quad (4)$$

因此，换刀时刻  $Q$  必须满足：

$$Q \leq \left[ \frac{12}{\mu_c^2} \left( \left( \frac{USL - LSL}{6C_p^*} \right)^2 - \sigma_\varepsilon^2 \right) \right]^{1/2} \quad (5)$$

## 2.2 成本模型

由于  $t$  时刻的刀具磨损量  $R(t) = ct$ ，且  $c \sim N(\mu_c, \sigma_c^2)$ 。则  $E(R(t)) = \mu_c t$ ，

$V(R(t)) = \sigma_c^2 t^2$ ，因此  $R(t)$  服从均值为  $\mu_c t$ ，方差为  $\sigma_c^2 t^2$  的正态分布。由于刀具的磨损和失效是由很多原因造成的，因而应被看作随机变量，而不应被看作是确定的值。这种概率特征可由 Bernstein 分布的概率密度函数描述，该函数为：

$$f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\gamma \alpha t}{(\alpha t^2)^{3/2}} \right) \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t - \gamma}{\sqrt{\alpha t^2}} \right)^2 \right] \quad (6)$$

其中， $\alpha = \left( \frac{\sigma_c}{\mu_c} \right)^2$ ， $\gamma = \frac{W_1}{\mu_c}$ ， $W_1$  为最大容许磨损<sup>[16]</sup>。那么刀具寿命  $Y$  的可靠性函数

为：

$$R_{eY}(t) = 1 - \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\gamma \alpha s}{(\alpha s^2)^{3/2}} \right) \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{s - \gamma}{\sqrt{\alpha s^2}} \right)^2 \right] ds \quad (7)$$

$t$  时刻的质量损失  $L(X_t) = K(X_t - T)^2$ ，其中  $K > 0$ ，为二次损失函数的系数，由顾

客的要求决定， $T$  为工件尺寸测量值的目标值。由  $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$ ，可知

$$\begin{aligned} L(X_t) &= K(X_t - T)^2 = K(\mu_0 + ct + \varepsilon - T)^2 \\ &= K[V(\mu_0 + ct + \varepsilon - T)] + K[E(\mu_0 + ct + \varepsilon - T)]^2 \\ &= K[\sigma_c^2 t^2 + \sigma_\varepsilon^2 + (\mu_0 + \mu_c t - T)^2] \end{aligned} \quad (8)$$

则任一周期  $P$  内的期望累积质量损失为：

$$\begin{aligned} L(\mu_0, P) &= \int_0^P E(L(X_t)) dt \\ &= \int_0^P K [\sigma_c^2 t^2 + \sigma_\varepsilon^2 + (\mu_0 + \mu_c t - T)^2] dt \end{aligned} \quad (9)$$

其中， $P$  的范围从零到正无穷。

在初始状态为  $\mu_0$ ，换刀时刻为  $Q$  的前提下，成本  $C(\mu_0, Q)$  的期望值  $E(C(\mu_0, Q)) = E(E(C(\mu_0, Q) | Y))$ 。由于刀具寿命  $Y$  存在两种可能的情形：在换刀时刻  $Q$  前突然失效或刀具性能良好，直到被替换。这两种情形下的成本模型为：

$$E(C(\mu_0, Q) | Y) = \begin{cases} L(\mu_0, Q) + C_0 - S(Q), & Y \geq Q \\ L(\mu_0, Y) + C_0 + C_1, & Y < Q \end{cases} \quad (10)$$

该式中的  $L(\mu_0, Q)$  和  $L(\mu_0, Y)$  可由公式(11)得到， $C_0$  为更换刀具成本， $C_1$  为由于刀具的突然失效而产生的惩罚成本， $S(t)$  为刀具在时刻  $t$  时的残留价值，当刀具突然失效时，令  $S(t) = 0$ 。因此，

$$\begin{aligned} E(C(\mu_0, Q)) &= E(C(\mu_0, Q) | Y \geq Q) + E(C(\mu_0, Q) | Y < Q) \\ &= L(\mu_0, Q)R_{eY}(Q) + C_0 + (1 - R_{eY}(Q))C_1 + \int_0^Q L(\mu_0, t)f_Y(t)dt - S(Q)R_{eY}(Q) \end{aligned} \quad (11)$$

假设  $Z$  为刀具使用时间，则其期望值为：

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(Z | Y < Q) + E(Z | Y \geq Q) \\ &= \int_0^Q tf_Y(t)dt + QR_{eY}(Q) \end{aligned} \quad (12)$$

那么，单位时间内的期望成本为：

$$\begin{aligned} A(\mu_0, Q) &= \frac{E(C(\mu_0, Q))}{E(Z)} \\ &= \frac{L(\mu_0, Q)R_{eY}(Q) + C_0 + (1 - R_{eY}(Q))C_1 + \int_0^Q L(\mu_0, t)f_Y(t)dt - R_{eY}(Q)S(Q)}{\int_0^Q tf_Y(t)dt + QR_{eY}(Q)} \end{aligned} \quad (13)$$

因此，将过程能力和成本相结合的换刀策略模型为：

$$\min(A(\mu_0, Q)), \quad \text{s.t.} \quad Q \leq \frac{USL - \mu_0}{\mu_c}, \quad LSL \leq \mu_0 \leq USL \quad (14)$$

即确定最佳刀具初始状态  $\mu_0$  和换刀时刻  $Q$ ，以最小化单位时间内的期望成本  $A(\mu_0, Q)$

### 2.3 应用分析

天津市某厂采用 CA6140 车床、硬质合金外圆车刀精车钢轴，顾客要求的公差范围为 (29.9mm, 30mm)，二次质量损失函数的系数  $K = 15$ ，轴直径的目标值  $T = 30$ ，换刀成本  $C_0 = 40$  (元)，由于刀具的突然失效而产生的惩罚成本  $C_1 = 30$  (元)，最大容许磨损  $W_1 = 1.0\text{cm}$ ，刀具的残留成本  $S(t) = 100 - 0.5t$ ，要求最小过程能力指数  $C_p \geq 1.0$ 。每隔 1 小时测量该刀具切削的轴直径，共采集 100 个点，对这 100 个值对时间  $t$  进行线性回归，回归模型为  $y_t = 29.9 + 0.00102t$ ，因此， $\mu_c = 0.00102$ ， $\sigma_\varepsilon = 0.004$ ， $\sigma_c = 0.0001$ 。由于  $USL = 30\text{mm}$ ， $LSL = 29.9\text{mm}$ ， $C_p^* = 1.0$ ，将这些值代入公式(7)，可得  $Q \leq 57$  小时。

由于刀具的残留成本  $S(t) = 100 - 0.5t$ ，因此换刀时刻  $Q$  时的残留成本  $S(Q) = 100 - 0.5Q$ 。由于  $\mu_c = 0.00102$ ， $\sigma_c = 0.0001$ ， $W_1 = 1.0\text{cm}$ ，因此  $\alpha = \left(\frac{\sigma_c}{\mu_c}\right)^2 = 0.01$ ， $\gamma = \frac{W_1}{\mu_c} = 1.0$ 。将以上参数值代入公式(9)、(11)、(14)和(15)，利用 Matlab 进行求解：

$$\min(A(\mu_0, Q)) = \min\left(\frac{E(C(\mu_0, Q))}{E(Z)}\right) \quad \text{s.t.} \quad 0 \leq Q \leq 57, \quad 29.9 \leq \mu_0 \leq 30$$

解之，可得  $\mu_0^* = 29.97\text{mm}$ ， $Q^* = 29$  小时。

### 3. 结论与展望

当过程存在趋势项时，传统的过程能力指数将变得不可靠，本文使用刀具磨损过程的能力指数，考虑质量损失、换刀成本、由刀具的突然失效引发的惩罚成本及刀具的残留价值，同时满足顾客要求的最小过程能力指数，将过程能力和成本相结合，提出了用于确定最佳刀具初始状态和换刀时刻的成本模型。在实际生产中，使用这种换刀策略，不仅可以提高产品质量，还会带来更少的停机时间和更低的生产成本。

### 4. 参考文献

- [1] E.C. Hugen, Total Quality—An Executive Guide for the 1990s[M]. Richard D. Irwin, Inc., Chicago, 1990: 65-66
- [2] [E. P. DeGrano, J. T. Black and R. A. Koosher, Material and Process in Manufacturing[M]. 7<sup>th</sup> edn., Macmillan, New York, 1988: 96-97
- [3] Montgomery DC. The use of statistical process control and design of experiments in product and process improvement[J]. IIE Transaction 1992, 24, 9-17
- [4] Gibra IN. Optimal control of processes subject to linear trends[J]. Journal of Industrial Engineering, 1967, 18(1), 35-41
- [5] [Hall RI, Eillon S. Controlling production processes which are subject to linear trend[J]. Operational Research Quarterly, 1963, 14(3), 179-189
- [6] Z. Drezner and G. O. Wesolowsky. Optimal control of a linear trend process with quadratic

- 
- loss[J]. IIE Transaction, 1989, 21(1), 66-72
- [7] Rahim MA, Lashkari RS. Optimal decision rules for determining the length of production run[J]. Computers and Industrial Engineering, 1985, 9(2), 195-202
- [8] Rahim MA, Raouf A. Optimal production run for a process having multilevel tool wear[J]. International Journal of Systems Science, 1988, 19(1), 139-149
- [9] A. Jeang. Optimal tool replacement with non-decreasing tool wear[J]. International Journal of Production Research. 1992, 30(2), 299-314
- [10] A. Jeang. Tool replacement policy for probabilistic tool life and random wear process[J]. Quality and Reliability Engineering International. 1999, 15(3), 205-212
- [11] 孙棣华. 扩展质量损失函数模型的研究[J]. 机械工程学报, 1998, 2, 26-32
- [12] M. A. Al-Fawzan, M. A. Rahim. Optimal control of a deteriorating process with a quadratic loss function[J]. Quality and Reliability Engineering International. 2001, 17(5), 459-466
- [13] Patrick H. Liu. A comparative study of three tool replacement/operation sequencing strategies in a flexible manufacturing system[J]. Naval Research Logistics, 2000, 47(5), 479-499
- [14] Spiring, F. A., 1991, Assessing process capability in the presence of systematic assignable cause[J]. Journal of Quality Technology, 23(2), 125-134
- [15] M XIE. Process capability indices for a regularly adjusted process[J]. International Journal of Production Research, 2002, 40(10): 2367-2377
- M. Ahmad, A. K. Sheikh. Bernstein reliability model: derivation and estimation of parameters[J]. Reliability Engineering, 1984, 8, 131-148